赣南师范学院学报（自然科学）
1989年第1期

纤维丛的微分几何*

陈 省 身

近年来，所谓的大范围微分几何已经取得一些进展，这一讲演的目的在于对其某个侧面的主要结果和思想加以讨论。从不严格的意义上来说，大范围微分几何研究的是微分几何对象的整体与局部性质之间的关系。为了能够应用微分学的方法，所考虑的空间不仅为拓扑空间，而且应是微分流形。这种可微分结构的存在性允许引入诸如切向量、切空间，微分式一类的概念。在微分几何的问题中通常有着一个附加结构，例如（1）一个黎曼度量，即一个二阶正定对称共变张量场；（2）一个具有如下性质的轨线系，经过每点恰恰有系内的一条轨线与过该点的任一给定方向相切；（3）一族方向锥面，过每点有一个，相应于广义相对论中的光锥面，如此等等。在这类所谓的几何对象中，无论从在分析、力学与几何问题中所起的作用来看还是就结果之丰富而言，黎曼度量或许都是最为重要的。1917年列维——齐维他（Levi—Civita）发现了他那著名的平行移动，这是切向量保持内积的一个无穷小变换，也是联络的第一个实例。关于列维——齐维他（Levi—Civita）平行移动的突出事实是表明：正是平行移动，而不是黎曼度量，对涉及曲率的绝大多数性质作出了解释。

列维——齐维他（Levi—Civita）的平行移动可以看作黎曼流形中两个无限邻近的切空间之间一个无穷小运动。正是E·嘉当（Elie Cartan），他意识到这个思想可作一个重要的推广，定义无穷小运动的空间并不需要是一个黎曼流形的切空间，作用于空间上的群起着决定性的作用。在其关于一般空间（Espaces généralisés）的理论中嘉当（Cartan）在所有的基本方面完成了我们称为联络的局部理论〔1、2〕。拓扑学中的纤维丛理论，始于惠特尼（Whitney）对于球丛情况的研究，继而为埃瑞斯曼（Ehresmann）、斯丁路特（Steenrod）、庞特里亚金（Pontrjagin）及他人所推进〔8、19〕，随着这一理论的发展，如今已有可能对嘉当（Cartan）关于联络的理论作出一个现代化的解释，埃瑞斯曼（Ehresmann）与韦依（Weil）首先完成了这项工作〔7、22〕。

设空间F受一个同胚拓扑群G的作用。带有方位空间F与结构群G的纤维丛由拓扑空间B、X以及B到X的一个满射ψ构成，满足下列条件：（1）X被一族邻域$\{U_\alpha\}$复盖，U_α称为坐标邻域，对每个U_α存在一个同胚（坐标函数）$\varphi'_\alpha: U_\alpha\times F\longrightarrow\psi^{-1}(U_\alpha)$，成立$\psi\varphi_\alpha(x,y)=x, x\in U_\alpha, y\in F$（2）由（1）推知，$\psi^{-1}(U_\alpha)$中的一点具有坐标（x y），而$\psi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$中的一点则有两组坐标$(x,y)$与$(x,y')$，满足$\varphi_\alpha(x,y)=\varphi_\beta(x,y')$。$g_{\alpha\beta}(x): y'\longrightarrow y$必须是$U_\alpha\cap U_\beta$映入G的连续映射。

空间X与B分别称作底空间与丛空间。每个子集$\psi^{-1}(x)\subset B$称为一个纤维。

---

* 这是陈省身教授1950年在美国坎布里奇召开的第十一次国际数学家大会上的报告——编者

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

以上对于纤维丛所作定义未免过于狭隘了。因为它把坐标邻域和坐标函数当作定义的一部分。于是引入了一个等价关系。具有相同底空间X与相同F，G的两个丛（B、X），（B′X），其坐标邻域和坐标函数各为｛U_α，ψ_α｝、｛V_β、θ_β｝，如果存在一个保纤同胚T：$B\longrightarrow B'$使由$\theta_\beta(x,y)=T\varphi_\alpha(x,y')$定义的映射$h_{\alpha\beta}(x)$：$y\longrightarrow y'$是$U_\alpha\cap V_\beta$映入G的连续映射，则称两个丛是等价的。

纤维丛上的一种重要运算是从一个给定的丛来构造一些具有相同结构群的别的丛，特别是主丛，它由G自身作为方位空间，结构群G在其上的作用是左乘作用。主纤维丛的概念已经在嘉当（Cartan）活动标架法中处于核心地位了，尽管它的现代解释后来为埃瑞斯曼（Ehresmann）首先引入。主纤维丛可以定义如下：对$x\in X$，对于包含x的一个坐标邻域U_α，$g\in G$，令G_x是由$y\longrightarrow\varphi_\alpha(x,g(y))$，$y\in F$，定义的映射$\varphi_{\alpha,g}(x)$：$F\longrightarrow\psi^{-1}(x)$的全体。$G_x$仅仅与x有关。设$B^*=\bigcup_{x\in X}G_x$并同$\psi^*(G_x)=X$定义映射$\varphi^*$：$B^*\longrightarrow X$而坐标函数为$\varphi^*(x,g)=\varphi_{\alpha,g}(x)$。将$B^*$拓扑化使各个$\varphi^*_\alpha$定义$U_\alpha\times G$到$B^*$中的同胚，由此而得的丛$(B^*,X)$称为一个主纤维丛。从下述意义上来看这种构造是丛的等价类上的一种运算，即两个纤维丛等价当且仅当它们的主纤维丛是等价的。同理，可以定义其逆运算，这使我们构造出纤维丛，它们具有一个给定的主丛并以结构群G作用于其上的一个已知空间为方位空间，主纤维丛的一个重要性质是G作为右迁移作用在B^*上。

出于微分几何学的目的，我们假定所考虑的一切空间是微分流形而映射都是可微分的且处处具有达到最高秩的雅可比矩阵。特别假定结构群G为一连通李群。为简单起见我们又设底空间X是紧空间，尽管我们的一大部分讨论在没有这种假设时也能成立。

这些假设的内涵确实非常深广。首先我们引起了对于G的李代数L(G)的考虑。L(G)在G的左迁移，右迁移下保持不变和G的内自同构在L(G)上诱导出一个线性自同态群ad(G)，称为G的伴随群。对于L(G)的一组基，存在左不变线性微分式W^i和右不变线性微分式，π^i，每组由个数等于G的维数的线性无关的微分式构成。李群的一个基本定理表明其外导数给自·

$$d\omega^i=-\frac{1}{2}\sum_{jk}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,$$

（1）

$$d\pi^i=+\frac{1}{2}\sum_{jk}C^i_{jt}\pi^j\wedge\pi^k,i,j,k=1,\cdots,\dim G$$

其中C^i_{jk}是所谓的结构常数，关于下标反称并满足著名的雅可比关系。

回到我们纤维丛，映射$g_{\alpha\beta}$：$U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow G$的对偶映射把$\omega^i$和$\pi^i$映入$U_\alpha\cap U_\beta$的线性微分式，分别以$\omega_{\beta\gamma}$和$\pi_{\alpha\beta}$表示。因为在$U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$中$g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}$，故得到

$$(2)\ \omega^i_{\alpha\gamma}=\sum_j ad(g_{\beta\gamma})^i_j\omega^i_{\alpha\beta}+\omega^i_{\beta\gamma}$$

我们也可把$\omega_{\alpha\beta}$解释为$U_\alpha\cap U_\beta$中的向量值线性微分式，取值于L（G）。在如此解释时又简记其为$\omega_{\alpha\beta}$

在经典微分几何中，张量场概念的推广导致了下述情况：设E为G的表示M(G)所作用的向量空间。r阶M(G)型的张量微分式在每个坐标邻域，U_α中为一个r次外微分式u_α，它

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

取值于E，使得在$U_\alpha \cap U_\beta$中成立$u_\alpha = M(g_{\alpha\beta}) u_\beta$. u_α的外导数du_α一般不是张量微分式。正是为了保持导数的张量特征，在纤维丛中引入了一个附加结构，即一个联络。

纤维丛中的联络是U_α的一组线性微分式θ_α，取值于L(G)，使得

$$(3) \qquad \omega_{\alpha\beta} = -ad(g_{\alpha\beta})\theta_\alpha + \theta_\beta \qquad (在U_\alpha \cap U_\beta 中)$$

由（2）可见这种关系在$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$中是相容的。不难验证，一个联络在主纤维丛中定义一个横截于纤维的相切子空间场，换言之，定义了这样一些相切子空间，它们与纤维的切空间，在每点张成主丛的切空间。由初等扩张定理可见在每个纤维丛中能够定义一个联络。既然在联络的选择上有着很大的自由度，决定纤维丛与联络二者性质的关系便将成为本文最为关心的问题。

让我们先来定义所谓的绝对微分过程。设X∈L(G)，$\overline{M}(X)$为由G的表示M(G)所诱导出来的李代数L（G）的表示。则有

$$(4) \qquad dM(g_{\alpha\beta}) = \overline{M}(g_{\alpha\beta})M(\theta_\beta) - \overline{M}(\theta_\alpha)M(g_{\alpha\beta})$$

于是若对r次M（G）型张量微分式u_α令

$$(5) \qquad Du_\alpha = du_\alpha + \overline{M}(\theta_\alpha) \wedge u_\alpha ,$$

则Du_α是一个r+1次且仍为M(G)型的张量微分式。

为了考察联络的局部性质，我们再次利用李代数的一组基，其相应微分式θ_α具有分量θ^i_α。置

$$(6) \qquad \Theta^i_\alpha = d\theta^i_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{jk} C^i_{jk}\, \theta^i_\alpha \wedge \theta^k_\alpha \qquad (在U_\alpha中)。$$

形式Θ_α在所取基下的分量为Θ_d，于是Θ_α是次数为2的外微分式，取值于L（G）。容易验证在$U_\alpha \cap U_\beta$中成立$\Theta_\alpha = ad(g_{\alpha\beta})\Theta_\beta$。因此一组$\Theta_\alpha$定义了一个二次ad(G)型的张量微分式，称作联络的曲率张量。应用一种我们不拟在此描述的方式可以看出，曲率张量及由它逐次绝对微分所得的各个张量给出了联络的所有局部性质。特别是条件$\Theta_\alpha = 0$为联络是平坦联络的一个充要条件，换句话说，是通过坐标函数的适当选择使θ_α的充要条件。

容易验证下列关于绝对微分的各个公式：

$$\overline{M}(\Theta_\alpha) = d\overline{M}(\theta_\alpha) + \overline{M}(\theta_\alpha)^2,$$

$$(7) \qquad D\Theta_\alpha = 0$$

$$D^2 u_\alpha = \overline{M}(\Theta_\alpha) u_\alpha 。$$

这些关系在经典的情况下已为人们所知，第二式为比安基（Bianchi）恒等式。

现在我们考虑实值对称多重线性函数$P(Y_1,\cdots,Y_k)$，$Y \in L(G)$，$i=1,\cdots,k$，它们是不变式，也就是说，对所有a∈G成立$P(ad(a)Y_1,\cdots,ad(a)Y_k) = P(Y_1,\cdots,Y_k)$。为简单起见我们将把这样的函数称为不变多项式，k是它的次数。由加法的定义

$$(8) \qquad (P+Q)(Y_1,\cdots,Y_k) = P(Y_1,\cdots,Y_k) + Q(Y_1,\cdots,Y_k)$$

k次不变多项式的全体构成一个交换群。设I（G）是这些交换群取所有k≧0而作的直和。如果P和Q是次数各为k和l的不变多项式，定义它们的乘积PQ为一个由

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(9)　$(PQ)(Y_1,\cdots,Y_{k+1})=\frac{1}{N}\sum P(Y_{i_1},\cdots,Y_{i_k})Q(Y_{i_{k+1}},\cdots,Y_{i_{k+l}})$

给出的k+l次不变多项式，式中求和时取遍向量Yi的所有排列，而N是这种排列的个数。乘法的这一定义，加上分配律，使P(G)成为一个交换环，G的不变多项式环。

设P∈I(G)，次数为k。我们用曲率张量Θ代替Yi。那么P(Θ)=P(Θ,…,Θ)是一个2k次外微分式，鉴于P的不变性，P(Θ)在底空间X处处有定义。由比安基(Bianchi)恒等式(7_2)知道P(Θ)是闭的。因此，根据德拉姆(de Rham)定理，P(Θ)决定了以实数域为系数环的X的上同调环H(X)中一个元素。这个映射为一环同态

(10)　$h: I(G)\longrightarrow H(X)$

把G的不变多项式环映入X的上同调环。定义是借助于丛中的一个联络而作出的。

我们的第一个主要结果为下面的韦依(Weil)定理：h与联络的选择无关[22]。或者说，纤维丛的两个不同联络产生同样的同态h。为了进行证明，我们注意到如果θ_α与θ'_α是定义这些联络的线性微分式，其差$u_\alpha=\theta'_\alpha-\theta_\alpha$为一个ad(G)型的线性微分式，取值于L(G)。韦依(Weil)借助于u_α构造了一个微分式，其外导数对一给定的不变多项式P恰好等于差式P(Θ′)－P(Θ)。另一种证明最近已由H,嘉当(Cartan)作出，他应用了同态h的一个不变定义。

下一步我们确立这个同态和一个用纯拓扑方式定义的同态之间的关系。为此需要诱导丛和万有丛的概念。

设给定映射f：Y⟶X。于是邻域{$f^{-1}(U_\alpha)$}形成Y的一个复盖而坐标函数φ'_α：$f^{-1}(U_\alpha)\times F\longrightarrow f^{-1}(U_\alpha)\times\psi^{-1}(U_\alpha)$可由$\varphi'_\alpha(\eta,y)=\eta\times\varphi_\alpha(f(\eta),y)$来定义。这样就定义了Y上一个具有相同方位空间F及相同群G的纤维丛$Y\times\psi^{-1}(f(Y))$。我们说新丛是由映射f诱导而得的。如果原丛有个由U_α的微分式θ_α给出的联络，则f的对偶映射f^*把θ_α映入$f^{-1}(U_\alpha)$中的$f^*\theta_\alpha$而相应于(3)的关系式依然成立。因此微分式$f^*\theta_\alpha$在诱导丛中定义了一个诱导联络。

这种由一个给定纤维丛来生成新丛的方法十分有用。其价值基于这样一个事实，就是说这种方法提供了纤维丛计数的途径。事实上，假设在目前所作的考虑之下给出方位空间和结构群G并予固定。具有底空间X_0的纤维丛称为关于空间X是万有的，如果X上每个丛等价于一个由映射$X\longrightarrow X_0$诱导的丛，又如果两个这样的丛当且仅当映射为同伦时才是等价的。倘若对一个空间X，存在一个具有底空间X_0的万有丛，则X上的丛类与映射$X\longrightarrow X_0$的同伦类一一对应，从而X上丛的计数归结为一个同伦分类问题。

因此，了解在何种情况下存在万有丛引起了我们的兴趣。X_0上的丛对于维数小于或等于n的所有紧空间X为一万有丛的一个充分条件是，其主纤维丛的丛空间B_0具有直到维数n包括n在内的消没同伦群：$\pi(B_0)=0$，$0\leqq i\leqq n$，这里条件$\pi_0=0$表示连通性。

在我们所作的X是紧空间以及G为一连通李群的假定下，能够找出满足这些条件的丛。首先，根据E·嘉当(Cartan)，马尔赛夫(Malcev)，岩泽(Iwasawa)和莫斯托(Mostow)的一个定理，[12;14;15]，G含有一个最大紧子群G，而齐性空间G/G_1同胚于欧氏空间。这样就可以把具有群G的丛的等价和分类等问题归为G_1的相应问题。因为G_1是紧李

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

群，它具有一个忠实的正交表示且可看成作用于m维欧氏空间E^m的旋转群R(m)之子群。把E^m嵌入（m+n+1）维欧氏空间E^{m+n+1}并把齐性空间$\widetilde{B}=R(m+n+1)/(I_m\times R(n+1))$看作$X_0=R(m+n+1)/(G_1\times R(n+1))$上的一个丛，这里$I_m$为$E^m$的恒等自同构而R（n+1)是$E^{m+n+1}$中$E^m$元正交空间$E^{n+1}$的旋转群。这就是以$G_1$为结构群的一个主丛。由复盖同伦定理可证$\pi_i(\widetilde{B})=0$，$0\leqslant i\leqslant n$。这样就用一个显结构证明了万有丛的存在性

假定万有丛存在，底空间为X_0。设H(X,R)是X关于系数环R的上同调环。由于X上的丛类与映射$X\longrightarrow X_0$的同伦类一一对应，所以同态h'：$H(X_0,R)\longrightarrow H(X,R)$是由丛完全决定的。$h'$称为示性同态，其象$h'(H(X_0,R))\subset H(X,R)$称为示性环，而示性环的元素称为示性上同调类。总认为系数环就是实数域，尽管它在记号中有时漏写。

万有丛当然并不是唯一的。然而，任给两个纤维丛，它们对于维数小于或等于n的紧底空间是万有的，就可以在它们的底空间X_0与X_0'之间建立维数小于或等于n的奇异链的一个链变换，这引起了一个链等价。由此可见直至维数n包括n在内，X_0与X_0'的上同调环是自然同构的。因而示性同态与万有丛的选择无关。虽然这一断言对于我们的意图是有用的，可是注意到，按照同伦论，在X_0与X_0'之间还成立一个更强的结论，亦即它们具有相同的同伦n型。由此前面的断言便做为一个推论。

为了描述示性同态，需要了解$H(X_0,R)$。因为出于维数上的考虑$H(X_0,R)$中维数大于n（=dimX）的元素都被映为零，$H(X_0,R)$可用任何一个与之同构的环来代替，同构是直至n且包括n在内的维数上的。另一方面，由上一部分的讨论可知万有丛的选择是无关紧要的，从而我们可取一个，它的底空间为$X_0=R(m+n+1)/(G_1\times R(n+1))$。在这个万有丛中借用一个联络，按照上面所提供的过程可以定义从G_1的不变多项式环映入$H(X_0)$的一个同态$h_0=I(G_1)\longrightarrow H(X_0)$。$X_0$为一齐性空间，它的实系数上同调环$H(X_0)$可采用E嘉当（Cartan）首创近年来又经H.嘉当（Cartan），歇瓦莱（Chevalley），柯塞尔（Kozsul），勒雷（Leray）和韦依（Weil）成功地发展的方法〔13〕从代数角度予以研究。于是已可看出，直至维数n，h_0是一个一一同构。由此我们可在同态h'中用$I(G_1)$代替$H(X_0)$并把示性同态写成

（11）　h'：$I(G_1)\longrightarrow H(X)$

这个同态h'是用纤维丛的拓扑性质来定义的。

另一方面，上面所定义的同态h：$I(G)\longrightarrow H(X)$能被分解成两个同态之乘积。因为G下的不变多项式也是G_1下的不变多项式，所以存在一个自然同态

（12）　σ：$I(G)\longrightarrow I(G_1)$

由于G_1可取为结构群，又定义了同态

（13）　h_1：$I(G_1)\longrightarrow H(X)$。

现在，具有结构群G_1的联络能被看成具有结构群G的联络。应用这样一个联络，容易证明

（14）　$h=h_1\sigma$

我们那个看来已确实包含关于该课题一切现有知识的主要结果就是下列论断：

（15）$h'=h_1$

注意到h'是由纤维丛的拓扑性质来定义的而h_1则借助于一个联络作出定义，以致我们的定理

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.   http://www.cnki.net

给出了纤维丛和丛中定义的联络之间的一个关系，这样无论如何会给出一些限制。特别当结构群G是紧群时，有$G_1 = G$且σ是恒等映射，且从某种意义上看示性同态被联络所决定。例如，在能够定义联络使$h(I(G)) = 0$时，丛的示性环必须为零。

该定理的一种证明首先是建立在万有丛上得出的。继而在映射$f: X \longrightarrow X$。下对诱导丛和诱导联络也告成立。使用h与联络无关的韦依（Weil）定理，我们看出这一关系对于丛的任一联络都是成立的。

关于不变多项式环$I(G)$，$I(G_1)$和同态σ还有很多可谈的。当结构群是紧群时，这些论断通常可从拓扑角度来考虑而更加简便地作出证明。在另一种情况下则必须使用李代数的上同调理论。因为不想对此进行讨论，我们将限于对相应拓扑概念的解释。为此先来讨论紧群。换言之，开始时只把我们的注意力限于G_1。

首先回顾一下关于紧群流形的某些结果。所有最大交换子群是共轭的，且与一环面同构，环面的维数称为群的秩，按照主要来自庞特里亚金（Pontrjagin）的一个思想〔16〕我们可以在G_1的上同调类上定义G_1同调类的一种运算。事实上，同群的乘法定义$m: G_1 \times G_1 \longrightarrow G_1$，对偶同态$m^*$下G的K维上同调类的象$m^*\gamma^k$可写成$m^*\gamma^k = \sum u_i^{\gamma} \times V_i^{k-1}$。然后定义维数$S \leqq K$的同调类$C^s$在$\gamma^k$上的运算为$i(C^s)r^k = \sum_i K\, l(C^s, u_j^s) V_i^{k-s}$。我们称这种运算为内乘。$G_1$的上同调类$r^k$称为本原的，如果它与任意s维（$1 \leqq s \leqq k-1$）同调类的内乘为零。（实系数）紧群流形的同调结构已由下面霍普夫（Hopf）与萨梅尔森（Samelson）的定理〔11;18〕作出一种刻划：（1）所有本原上同调类具有奇维数；（2）本原类向量空间以G的秩为维数；（3）G_1的上同调环同构于本原类空间的格拉斯曼（Grassmann）代数。

本原类对万有主纤维丛$\psi: B_0 \longrightarrow X_0$的研究很起作用。把一个纤维$\psi^{-1}(x)(x \in X_0)$与$G_1$等同，又设i为$G_1$映入$B_0$的包含映射。若$r^k$是$X_0$的一个上闭链，则$\psi^*\gamma^k$为$B_0$的上闭链。由于$B_0$是零调的，存在一个上链$\beta^{k-1}$，以$\psi^*\gamma^k$为其上边缘。于是$i^*\beta^{k-1}$为$G_1$的一个上闭链，其上同调类只依赖于$\gamma^k$的上同调类。上同调类由此引出的映射称作一个超渡。它是G_1的不变多项式环映入G_1上同调环的一个加性同态并将一个K次不变多项式映入一个$2K-1$维上同调类。歇瓦莱（Chevalley）与韦依（Weil）证明了其象恰好就是本原类空间。

如果群G是非紧群，考察其李代数后，至少其G为半单的假设下我们可以推广以上的概念。H.嘉当（Cartan）歇瓦莱（Chevalley），与柯塞尔（Koszul）已经发展了一种非常全面的理论用以处理这种情况，在某种意义上这可以看成上列讨论的代数翻版。在他们的结论中我们只提针对现今的目标而感兴趣的如下一点：G下的不变多项式环具有与G的秩相等的一组生成元；可这样选择它们，使之在超渡下的象张成G的本原类空间。

利用这样一个事实，即李代数与超渡的上同调理论可从代数角度来定义，从而对G，我们得到下面的图表

$$\begin{array}{ccc} H(G) & \xrightarrow{i^*} & H(G_1) \\ t\uparrow & & \uparrow t_1 \\ I(G) & \xrightarrow{\sigma} & I(G_1) \end{array}$$

不难证明图表中的交换性成立。因此σ下的象取决于$H(G)$在i^*下的象，就是说取决

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

于G_1在G中的“同调位置”。一般说来，$\sigma[I(G)]\neq I(G_1)$。

在我们所定义的上同调示性类与障碍论的拓扑方法里取同样名称的类之间有着某些关系，只是我们不能予以详细讨论。后者产生于在逐次骨架上用扩张来定义纤维丛一个截面（即一个映射f把X映入B，使ψf为恒等的）之时，它们是系数群上的上同调类，系数群即为方位空间的同伦群。我们将可从一些例子看出，有时可以通过系数群的等同化来把它们等同化。然而一般说来，我们的示性类建立在同调讨论的基础上，而障碍理论的示性类则建立在同伦的考虑之上。它们有互补的作用。

我们这一讲的余下的部分是考察一些例子。虽说主要的结果都将由一般理论而得，在个别的情形下产生特殊的问题，它们是相当有趣的。先取G为m个变量的旋转群，又设在丛中给定一个联络。这特别包含了具有一个正定度量的可定向黎曼流形的情形，这时丛是流形的切丛而联络则由列维——齐维他（Levi—Civita）的平行移动给出；此外这也包含了嵌入于可定向黎曼流形的可定向子流形理论。

通过$G=R(m)$的李代数基底的适当选取，李代数空间能等同于一个m阶反对称矩阵的空间。从而可以在每个坐标邻域中用一个线性微分式的反对称矩阵$\theta=(\theta_{ij})$来定义联络，并用一个二次微分式的反对称矩阵$\Theta=(\Theta_{ij})$来确定其曲率张量。伴随群的作用表现为$ad(a)\Theta=A\Theta{}^tA$，这里A是一个行列式为1的正交阵而${}^tA$为其转置。

第一个问题当然是决定不变多项式环的一组生成元；应用不变性基本定理，这容易透彻地做到〔23〕。我们列写对应的微分式：

$$\Delta_s=\Theta_{i_1 i_2}\cdots\Theta_{i_s i_1},\qquad s=2,4,\cdots,m+1,\ m\text{为奇数}$$

$$(16)\qquad \Delta_s=\Theta_{i_1 i_2}\cdots\Theta_{i_s i_1},\qquad s=2,4,\cdots,m-2,\ m\text{为偶数}$$

$$\Delta_0=\in_{i_1\cdots i_m}\Theta_{i_1 i_2}\cdots\Theta_{i_{m-1} i_m},\qquad m\text{为偶数},$$

用以代替不变多项式，其中重复的指标表示求和而$\in_{i_1\cdots i_m}$为克罗内克（Kronecker）张量，按$i_1\cdots,i_m$为1，…，m的偶置换或奇置换分别等于+1或-1，其余情况下为零。因为$R(m)$的秩按m为奇数或偶数分别等于$(m+1)/2$或$m/2$，我们在此验证上述生成元的个数与秩相等。它们构成生成元的一个完全集，因为它们显然是独立的。

由此可见，被这些微分式或这些微分式的多项式决定的上同调类仅与丛有关而与联络无关。其推论之一是，如果所有这些微分式为零，则示性环是平凡的。（16）中的微分式首先由庞特里亚金（Pontrjagin）给出〔17〕。

为了几何上的应用，对于一个万有丛的底空间作出更明确的描述是大有益处的。这件事显得分外重要，因为那将使我们得以考察系数环不同于实数域的示性同态。我们的一般理论给出了格拉斯曼（Grassmann）流形

$$X_0=R(m+n+1)/(R(m)\times R(n+1))$$

作为这样一个底空间，它可等同于$(m+n+1)$维欧氏空间E^{m+n+1}中经过一点O的全体有向m维线性空间所构成的空间。

格拉斯曼（Grassmann）流形的同调结构已由埃瑞斯曼（Ehresmann）作过研究〔9，10〕。一个胞腔剖分可用下列过程来构造：取一个线性空间序列

$$0\subset E^1\subset E^2\subset\cdots\subset E^{m+n}\subset E^{m+n+1}.$$

与一列整数

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_m \leqq n+1$$

相对应，用（$a_1, \cdots, a_m$）表示所有m维线性空间$\xi \in X_o$所成集合使

$$\dim(\xi \cap E^{a_i+i}) \geqq i, \qquad i=1, \cdots, m$$

（$a_1, \cdots, a_m$）的内点组成$a_1+\cdots+a_m$维的两个开胞腔。这些开胞腔构成了X_o一个胞腔剖分，其关联关系也能确定。由此可以决定X_o的同调群与上同调群。特别是可用符号（$a_1 \cdots a_m$）±表示一个上链，就是说，对于相应开胞腔取值+1而其余情况下取值为零的上链。于是示性同态能被描绘成这些符号的组合映入X的上同调环H（X，R）的一个同态。当R为实数域时结果尤为简单。事实上，维数小于或等于n的上同调群一组基由这样一些上闭链组成，作为符号所有a_i为偶数，再连同m为偶数时的上闭链（1…1）。

对示性同态所作的这一新描述为我们给出了单个示性类的一种几何意义。在这方面特别值得注意的是类h′（1…1），它仅当m为偶数时存在。事实上，由主丛构造而具有方位空间$S^{m-1}=R(m)/R(m-1)$的丛在惠特尼（Whitney）的意义下就是一个（m－1）－球面丛。对于这样一个球丛，惠特尼（Whitney）引进了带有整系数的一个示性上同调类W^m。可以证明W^m当约化到实系数时，恰恰就是类h′（（1…1））。另一方面，后者在万有丛上能与微分形式Δ_o所定义的类的一个数值倍数相等同。对底流形的基本闭链取这些类的值，我们能把结果写成一个积分公式

$$(17) \qquad W^m \cdot X = C\int_X \Delta_o \quad ,$$

其中C为一个数值因子，X表示底流形的一个基本闭链。对黎曼流形而言，$W^m \cdot X$等于X的欧拉一庞加莱(Euler－Poincaré)示性数，我们的公式化为高斯－邦尼(Gauss－Bonnet)公式〔3〕。

引入符号

$$P^{4k}=h'(0\cdots0\underbrace{2\cdots2}_{2k\text{重}})$$

$$(18) \qquad \overline{P^{4k}}=h'(0\cdots0\ 2k\ 2k)$$

$$X^m=h'(1\cdots1),\ m\text{为偶数},$$

这里的符号也表示对应上闭链所属的上同调类。通过对于X_o的上同调环乘法结构的研究，可以证明示性同态取决于类P^{4k}，X^m，$4k \leqq \dim X$或者类$\overline{P^{4k}}$，X^m，$4k \leqq \dim X$。

这里要提及类$\overline{P^{4k}}$的一个应用。为简单起见，我们仅限于一个紧微分流形的切丛，条件$\overline{P^{4k}}=0$，$2k \geqq n+2$为流形能嵌入一个$m+n+1$维欧氏空间的必要条件。于是得到嵌入不可能性的判准，这可以用流形上一个黎曼度量的曲率张量来表示。

我们采纳的第二个例子是G为酉群的情况。这样的丛作为复解析流形的切丛出现，且对流形引入一个埃尔米特度量将产生出丛的一个联络。

m个变量酉群U（m）的李代数空间可等同于m×m埃尔米特矩阵A（${}^t\overline{A}=A$）的空间。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

从而可在每一坐标邻域由线性微分式的埃尔米特矩阵$\theta=(\theta_{ij})$来定义一个联络，并由二次微分式的埃尔米特矩阵$\Theta=(\Theta_{ij})$来定义其曲率张量。在伴随群之下曲率张量按照$\mathrm{ad}(a)\Theta=A\overline{\Theta}{}^tA$来变换，A为一酉矩阵。利用伴随群的这种表示，易于列出一组不变多项式我们给出他们相应的微分式为

$$(19)\qquad V_k=\Theta_{i_1i_2}\cdots\Theta_{ki_1}\qquad k=1,\cdots,m。$$

因为它们显然独立且其个数等于U（m）的秩m，所以它们形成不变多项式环中生成元的一个完全集。

正如旋转群的情况，复格拉斯曼(Grassmann)流形$X_0=U(m+n)/(U(m)\times U(n))$是一个万有丛的底空间，对其所作的研究在某些几何问题上将会是有用。的其结果比实的情况下更为简单，但这里不拟叙述。复的情况下一个明显的特色是可以在这样的不变多项式环上选择一组生成元，其对应微分式为

$$(20)\qquad \Psi_r=\frac{1}{(2\pi(-1)^{1/2})^{m-r+1}(m-r+1)!}\sum\delta(i_1\cdots i_{m-r+1};\ j_1\cdots j_{m-r+1})\cdot\Theta_{i_1j_1}\cdots\Theta_{i_{m-r+1}j_{m-r+1}},\quad r=1,\cdots,m$$

这里$\delta(i_1\cdots i_{m-r+1};\ j_1\cdots j_{m-r+1})$除了$j_1,\cdots,j_{m-r+1}$组成$i_1,\cdots,i_{m-r+1}$的一个置换时按置换或偶或奇各等于+1或-1之外，都取为零,求和则从1到m取遍所有指标$i_1,\cdots,i_{m-r+1}$。这组生成元的优点在于由微分式决定的上同调类有一个简单的几何意义。事实上，对于具有方位空间U（m）/U（m-r）的丛来说，它们是与施蒂弗尔—惠特尼(Stiefel—Whitney)类相似的类。因此它们是确定一个截面的第一障碍，于是就更容易处理〔4〕。实质上同样的类在代数几何中已由M，埃杰（Eger）与J.A.托德（Todd）引进，甚至比他们在微分几何中露面更早〔6；20〕。

具旋转群的丛的情况就不一样了，因为施蒂弗尔—惠特尼（Stiefel—Whitney）类除开最高维那个以外，本质上是mod2类因而不能进入我们的描写。然而，带有群R（m）的丛与带有群U（m）的丛之间有着密切的联系。事实上，给定带有群R（m）的一个丛，我们可作它与自身的惠特尼（Whitney）乘积，这是一个带同一底空间及群R（m）×R（m）的丛。这个群可以嵌入U（m），从而得到一个具有群U（m）的丛。如此一个过程经常能用来把具有旋转群的丛上各种问题归结为具有酉群的丛上的问题。

最后我们以群是m个变量一般线性群GL（m）的单位元的分支的情况为例。丛的联络称为仿射联络。与前两例的本质区别在于这里群是非紧的。

群GL（m）的李代数可与全体m行方阵所成空间等同，以致在每个坐标邻域中曲率张量给自一个这样的二次微分式矩阵：$\Theta=(\Theta_i^j)$.伴随群的作用由$\mathrm{ad}(a)\Theta=A\Theta A^{-1}$定义，$a\in GL(m)$，易见不变多项式环的一组生成元能选得使对应微分式为

$$(21)\qquad M_S=\Theta_{i_2}^{i_1}\cdots\Theta_{i_s}^{i_1},\qquad S=1,\cdots,m-1$$

根据一般理论，余下的问题是决定GL（m）下的不变多项式环映入其最大紧子群下不

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

变多项式环的同态，在这种情况下最大紧子群就是旋转群R（m）。可以看出对于偶数s，Ms映入△s，而对奇数s，Ms映入零。由△₀定义的类不属于同态象。这一事实导致有趣的说明，也就是说对于仿射联络并不存在与高斯一邦尼（Gauss—Bonnet）公式相似的公式。

在各个丛中，最重要的或许是一个微分流形的切丛。上面我们至少在流形可定向且有偶维数的情况下提到过某个示性类与流形的欧拉一庞加莱（Euler—Poincare）示性数之间的等同。除此而外，在流形的拓扑不变量与切丛的示性同态二者关系方面所知就很少了。近年来，托姆（Thom）与吴文俊已在这个问题上作出了贡献〔21；25〕。虽然并不知道一个拓扑流形是否总有一个微分结构，也不知它是否能有两个本质不同的微分结构，托姆（Thom）与吴文俊却证明了带有系数mod 2与系数mod 3的切丛的示性同态与可微分结构的选择无关，假如微分结构存在的话。简言之，这表示此种示性同态是微分流形的拓扑不变式。对系数mod 3作出证明要比mod 2的情况困难得多。

关于具有其它群的丛绝少问到此类问题。下一个有趣的问题或许是由道路几何导出的射影联络理论。在这种情况下带的射影群的丛与切丛及道路族都有关。了解示性同态是否是流形的拓扑不变式，或者示性同态的什么部分是流形的拓扑不变式，恐怕是有兴趣的。

在结束之前我们要提到一个与上述讨论没有密切关系而在联络理论中却很重要的概念，即和乐群的概念。它可以定义如下：若ω为G中的左不变微分式，取值于L（G），又若θ_α定义一个联络，则方程

(22) $$\theta_\alpha + \omega = 0$$

与坐标邻域无关。如果在底流形中给出一条参数化的曲线，这个微分方程在G中定义出一族在群的左迁移下不变的积分曲线。设x∈X并考虑X中以x为起点的所有闭参数化曲线。对这样的每一曲线C，令从G的单位元e出发的积分曲线终点为a（C）。所有这样的点a（C）构成G的子群H，联络的和乐群。

附带说一句，本文某些论述的细节，可见诸于作者1951年在普林斯顿高等研究院的油印讲稿《微分几何的若干课题》。

（本文译自：Proc.Int.Congr.Math.（1950）Ⅰ，397—411.李泳川译，虞言林校）

参 考 文 献

1. E.CARTAN, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés,Acta Math.vol.48（1926） pp.1—42.

2. ——, L'extension du calcul tensoriel aux géométries non-affines, Ann.of Math.（2） vol.38（1947） pp.1—13.

3. S.S.CHERN, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, Ann.of Math.(2) vol.45（1944） PP.747—752.

4. ——, Characteristic classes of Hermitian manifolds, Ann.of Math.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(2) vol.47 (1946) pp.85—121.

5. ——, Some new viewpoints in differential geometry in the large, Bull. Amer. Math. Soc. vol.52 (1946) pp. 1—30.

6. M.EGER, Sur les systémes canoniques d'une variété algébrique, C.R.Acad. Sci. Paris vol.204 (1937) PP.92—94, 217—219.

7. C. EHRESMANN, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différenliable, Seminaire Bourbaki, March, 1950. This paper contains references to earlier notes of the author on the subject in C.R. Acad.Sci. Paris.

8. ——, Sur la theorie des espaces fibres, Colloque de Topologie Algébrique, Paris, 1947, pp. 3—15.

9. ——, Sur la topologie de certains espaccs homogenes, Ann. of Math. (2) vol.35 (1934) pp. 396—443.

10. ——, Sur la topologie des certaines variétés algébriques réelles, Journal de Mathé matiques vol.104 (1939) pp. 69—160.

11. H.HOPF, Uber die Topologie der Gruppenmannigfaltigkeiten und inre Verallgemei nerunyen, Ann. of Math.(2)vol.42 (1944) pp. 22—52.

12. K.IWASAWA, On some types of topological groups, Ann. of Math. (2) vol.50 (1949) pp .507—558.

13. J.L.KOSZUL, Homologie et cohomologie des algébres de Lie, Bull. Soc. Math. France vol.78 (1950) pp. 65—127.

14. A.MALCEV, On the theory of Lie groups in the large, Rec.Math. (Mat.Sbornik) N. S. vol.16 (1945) pp. 163—189.

15. G. D. MOSTOW, A new proof of E. Cartan's theorem on the topology of semi-simple qroups, Bull. Amer. Math. Soc. vol.55 (1949) pp.969—980.

16. L. PONTRJAGIN, Homologies in compact Lie groups, Rec.Math. (Mat. Sbornik) N. S. vol.18 (1939) pp. 389—422.

17. ——, On some topological invariants of Riemannian manifolds, C. R. (Doklady) Acad. Sci URSS vol. 43 (1944) pp. 91—94.

18. H. SAMELSON, Beitrae zur Topologie der Gruppen—Mannigfaltigkeiten, Ann. of Math. (2) vol.42 (1941) pp.1091—1137.

19. N.E. STEENROD, Topology of fiber bundles, Princeton, 1951. With few exceptions this will be our standard reference on fiber bundles.

20. J. A. TODD, The geometrical invarianls of algebraic loci, Proc. London Math. Soc. (2) vol.43 (1937) pp.127—138.

21. R.THOM, Variétés plongées et i—carrés, C. R. Acad. Sci, Paris

（下转第42页）

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参考文献

1 〔美〕D.Marcuse.传输光学.人民邮电出版社，1987；第三章
2 D.Gloge &.D.Marcuse. J.Opt. Soc. Am. 1969；59（12）：1629—1631
3 G.A.Askar'yan. Sov. Phys. JETP. 1962；15：1088，1161
4 Y.R.Shen. The Principle of Nonlinear Optics. John Wiley &. Sons, Inc. , 1984
5 Akhmanov, S.A. , Sukhorukov, A.P. , and Khokhlov, R.V. , Sov.Phys. JETP, 1966；23：1025
6 Zakharov, V.E. , and Shabat, A.B. , Sov.phys.JETP, 1972；34：62
7 Zakharov, V.E. , Sov.Phys.JETP, 1972；35：908

Nonlinear Schrödinger Equation of Light Rays

Xie Yinmao Li Hong

（Department of physics）

（Dppartment of physics of Jianxi Teachers College）

Abstract

In this paper, by means of the formal quantum theory of the light rays of near-axis approximation, we obtain a nonlinear Schrödiger equation by analysing the case that the variance of refractive index is proportionate to the light intensity, and some interesting results are gained through discussion.

Key Words nonlinear Schrödinger equation, formal quantum theory of light rays

（上接第22页）

vol.230（1950）pp. 507—508.

22. A.WELL, Géométrie differentielle des éspaces fibrès, unpublished.

23. H. WEYL, Classical groups, Princeton, 1939.

24. H. WHITNEY, On the topology of differentiable manifolds, Lectures on Topology, Michigan, 1941, pp. 101—141.

25. WEN—TSÜN WU, Topological invariance of Pontrjagin classes of differentiable manifolds, to be published.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net